Tečná struktura

Prostor směrů (rychlostí)
Prostor derivací na $\mathcal{F}M$ v bodě
Tečný prostor
Kotečný prostor
Vektorová pole a pole 1-forem
Lieova závorka

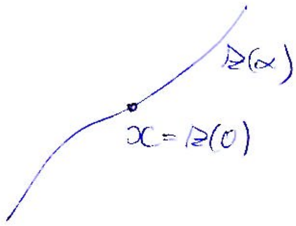
Prostor směrů (rychlostí)

parametrizovaná křivka skrze x

$z : I \to M$ hladké

I interval v okolí 0 v $\mathbb{R}$

$z(0) = x$



derivace fce podél křivky z

$\frac{d}{d\alpha} f \circ z \big|_{\alpha=0}$

křivky stejného směru (rychlosti)

$z_1(\alpha)$ a $z_2(\alpha)$ mají stejný směr (rychlost)

$\equiv \forall f \in \mathcal{F}M \quad \frac{d}{d\alpha} f \circ z_1 \big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha} f \circ z_2 \big|_{\alpha=0}$

jedná se o relaci ekvivalence

směr (rychlost)

směr $\equiv$ třída ekviv. křivek stejného směru

třídu ekv. křivce z označíme $\dot{z} \equiv \frac{Dz}{d\alpha}\big|_{\alpha=0}$

derivace ve směru

a směr v x a $z(\alpha)$ jeho reprez. $a = \dot{z}$

$a[f] = \frac{d}{d\alpha} f \circ z \big|_{\alpha=0}$

nezávisí na volbě reprezentanta

derivace složené fce

$f = F(f^1, \dots, f^k) \qquad f, f^j \in \mathcal{F}M \qquad F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ hladké

$\Downarrow$

$a[f] = \sum_j \frac{\partial F}{\partial f^j}(f^1, \dots f^k)\, a[f^j]$

plyne z definice převedením na obyčejné derivování komponenty směru

zvolme mapu $(U, [x^i])$ v okolí bodu x

směr je jednoznačně určen d-ticí čísel

$$a^i \equiv a[x^i]$$

tj. platí

$$\frac{d}{d\alpha} x^i \circ z \Big|_{\alpha=0} = a[x^i] \qquad \text{pro křivku } z(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \forall f \in \mathcal{F}M \quad \frac{d}{d\alpha} f \circ z \Big|_{\alpha=0} = a[f]$$

$$\Rightarrow \quad \dot{z} = a$$

důkaz

nechť $\bar{f} = f \circ x^{-1}$ je souř. repr. fce f

$$\frac{d}{d\alpha} f \circ z \Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha} \bar{f} \circ x \circ z \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^j} \circ x \circ z \Big|_{\alpha=0} \frac{d}{d\alpha} x^j \circ z \Big|_{\alpha=0}$$

$$\underset{\text{předpoklad}}{=} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^j} a[x^j] \underset{\text{der. sl. fce ve směru } a}{=} a[f]$$

každá d-tice a^i určuje směr

definujme souřadnicovou přímku $l_{a^i}(\alpha)$

$$x^i(l_{a^j}(\alpha)) = x_0^i + \alpha a^i \qquad x_0^i = x^i(x)$$

komponenty směru $\dot{l}_{a^i}$ jsou a^i

$$\dot{l}_{a^j}[x^i] = \frac{d}{d\alpha} x^i(l_{a^j}(\alpha)) \Big|_{\alpha=0} = a^i$$

změna souřadnic

dvě mapy $(U, [x^i])$ $(\tilde{U}, [\tilde{x}^i])$

komponenty směru $\dot{z}$ $\rightarrow$ a^i $\tilde{a}^i$

$$\tilde{a}^i = \dot{z}[\tilde{x}^i] = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \dot{z}[x^j] = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} a^j$$

lineární struktura prostoru směrů

definujeme sčítání a škálování směrů

$$a+b = \mathring{l}_{a^i+b^i}$$

$$ra = \mathring{l}_{ra^i}$$

kde a^i, b^i jsou komponenty a, b vůči nějaké souřadnici —

nezávisí na volbě souř., tj.

$$\mathring{l}_{a^i+b^i} = \mathring{\tilde{l}}_{\tilde a^i+\tilde b^i}$$

x-komponenty a^i+b^i $\longleftrightarrow$ $\tilde x$-komponenty $\tilde a^i+\tilde b^i$

lineární vztah $\rightarrow$ $\mathring{l}_{a^i+b^i}$ má $\tilde x$-komponenty

$$\frac{\partial \tilde x^i}{\partial x^j}(a^j+b^j) = \tilde a^i+\tilde b^i$$

souřadnicové směry

$\frac{\partial}{\partial x^i}$ směr souřadnicové čáry

$$x^{-1}(\underbrace{\ldots}_{\text{konstanty}}\ \underset{\text{i-tá pozice}}{\alpha}\ \underbrace{\ldots}_{\text{konstanty}})$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}[f] = \frac{\partial \bar f}{\partial x^i}(x) \qquad \text{kde } f = \bar f \circ x$$

směry $\frac{\partial}{\partial x^i}$ tvoří bázi v prostoru směrů

$$a = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \text{kde } a^i = a[x^i]$$

$$\Uparrow \quad a[f] = a[x^i]\frac{\partial f}{\partial x^i} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}[f]$$

Prostor derivací na $\mathcal{F}M$ v bodě

Def: a je derivace fcí z $\mathcal{F}M$ v bodě x $\equiv$

$$a: \mathcal{F}M \to \mathbb{R}$$

$$a[rf] = r\,a[f] \qquad f,g \in \mathcal{F}M \quad r \in \mathbb{R}$$

$$a[f+g] = a[f] + a[g]$$

$$a[fg] = a[f]\,g|_x + f|_x\,g[g]$$

lokalita derivace v bodě x

$f = 0$ na okolí x $\Rightarrow$ $a[f] = 0$

$f =$ konst na okolí x $\Rightarrow$ $a[f] = 0$

$f = g$ na okolí x $\Rightarrow$ $a[f] = a[g]$

důkaz:

1) nechť $f|_U = 0$ $\quad x \in U$
$\left.\begin{array}{l} \\ \operatorname{supp}\beta \subset U \quad \beta(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta f = 0$ na M

$$0 = a[\beta f] = a[\beta]\,\underbrace{f|_x}_{0} + \underbrace{\beta|_x}_{1}\,a[f] = a[f]$$

3) $f|_U = g|_U \Rightarrow (f-g)|_U = 0 \Rightarrow a[f] = g[g]$

2) $a[1^2] = a[1] + a[1] \Rightarrow a[1] = 0 \qquad a[r] = r\,a[1] = 0 \qquad$ 3) $\Rightarrow$ stačí na okolí

umožňuje zúžit der. na $\mathcal{F}U$, resp. na svazek $\mathcal{F}M$ - viz dále

derivace složené fce

$f = F(f^1, \dots, f^k) \qquad f^1, \dots, f^k \in \mathcal{F}M \qquad F$ hladká $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$$a[f] = \sum_j \frac{\partial F}{\partial f^j}(f^1, \dots, f^k)\, a[f^j]$$

důkaz:

lineární aprox. fce F včetně zbytku (analýza v $\mathbb{R}^k$)

$$F(u^1, \dots, u^k) = F(u^1_0, \dots, u^k_0) + \sum_j \frac{\partial F}{\partial u^j}(u^1_0, \dots, u^k_0)\,\Delta u^j + O(\Delta u^p \Delta u^q)$$

$$\Delta u^j = u^j - u^j_0$$

$$a[f] = a\Big[\, f|_x + \sum_j \frac{\partial F}{\partial f^j}(f^1 \dots f^k)\Big|_x (f^j - f^j|_{x_0}) + O(\Delta f^p \Delta f^q)\Big]$$

$$= \sum_j \frac{\partial F}{\partial f^j}(f^1, \dots, f^k)\Big|_x\, a[f^j] + O(\Delta f^p)$$

kde $u^j \to f^j \qquad u^j_0 = f^j|_x$

Tečný prostor

Def: Tečný prostor $T_x M$ v bodě x

$T_x M$ = prostor derivací v x

tečný vektor v x = derivace v bodě x

lineární struktura

$(a+b)[f] = a[f] + b[f]$

$(\kappa a)[f] = \kappa\, a[f]$

vztah ke směrům

- derivace ve směru $\dot{z}$ v bodě x je derivace na FM v x

  $\dot{z}[f]$ – splňuje linearitu a Leibnize

- $\frac{\partial}{\partial x^i}$ tvoří bázi v $T_x M$

  nechť $f = \bar{f} \circ x \Rightarrow a[f] = \bar{f}_{,j}\big|_x a[x^j] = a[x^j] \frac{\partial}{\partial x^j}[f]$

  $\Rightarrow a = a^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ kde $a^j = a[x^j] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i}$ báze

- každý tečný vektor je směrem

  komponenty a^i tečného vekt. a určují souř. př. $\dot{z}$ ve směru $\dot{z}$

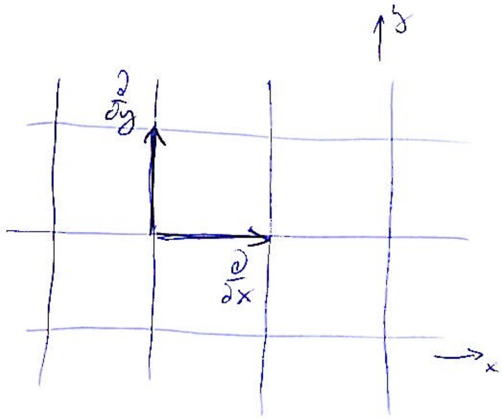
ztotožníme pojem tečného vektoru a směru

pzn: značení $\frac{\partial}{\partial x^i}$ pro bázový vektor tečný k souř. čáře je kontextové, tj. $\frac{\partial}{\partial x^i}$ závisí na definici všech souřadnic

změna x^j $j \neq i$ mění význam $\frac{\partial}{\partial x^i}$ → příklad značení $\frac{\partial}{\partial x^i}$ pro bázi vektorů tečných k souř. čarám je kontextové, tj. $\frac{\partial}{\partial x^i}$ závisí na def. všech souřadnic

změna x^j $j \neq i$ mění význam $\frac{\partial}{\partial x^i}$

Př: $\mathbb{R}^2$



souřadnice x, y

souřadnice $\bar{x}, \bar{y}$

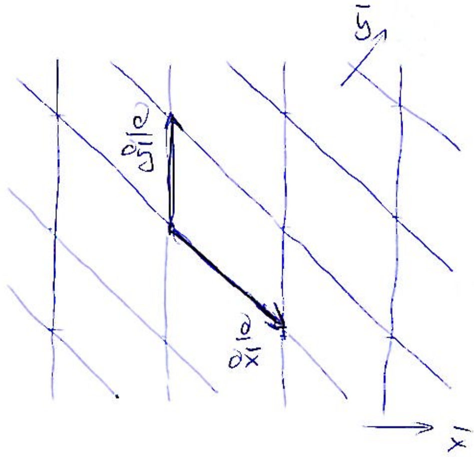
$\bar{x} = x \qquad x = \bar{x}$

$\bar{y} = y + x \qquad y = \bar{y} - \bar{x}$

vektorové báze

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}$$



máme tedy

$x = \bar{x}$ ale $\frac{\partial}{\partial x} \neq \frac{\partial}{\partial \bar{x}}$

$y \neq \bar{y}$ ale $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}}$

Př: E^3, kart. souř. x, y, z, sf. souř. r, ϑ, φ

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\vartheta$$

transformace souř. bází

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} = \sin\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial z} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\frac{\partial}{\partial z} = r\cos\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= z\frac{x}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{y}{\varrho}\frac{\partial}{\partial y} - \varrho\frac{\partial}{\partial z} \qquad \varrho = r\sin\vartheta = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial z} = -r\sin\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}$$

$$= -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

inverzní vztahy

$$x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} = r\frac{\partial}{\partial r} \qquad (1)$$

$$x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\varrho^2}{z}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \qquad (2)$$

$$-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\varrho}{r^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta} \qquad \Leftarrow (1) - (2)$$

$$x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\varrho^2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{z\varrho}{r^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta} \qquad \Leftarrow \bigcirc(1) + \bigcirc(2) \qquad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{xz}{\varrho r^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{y}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial \varphi} \qquad \Leftarrow (4) - (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{yz}{\varrho r^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{x}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial \varphi} \qquad \Leftarrow (4) + (3)$$

tečný bundle

soubor všech teč. vekt. ve všech bodech tvoří tečný bundle

$$\mathbb{T}M = \bigcup_{x \in M} \mathbb{T}_x M$$

tečný bundle je dif. varieta

atlas indukovaný atlasem na M

mapa (U, x) na M $\quad x \in U$

vektoru $a \in \mathbb{T}_x M$ přiřadíme souřadnice

$$x_* = [x^i, a^i] \qquad \text{kde}$$

$$x^i = x^i(x) \qquad a^i = a[x^i]$$

dostáváme mapu $(\mathbb{T}U, x_*)$ na $\mathbb{T}M$

přechodové zobr. mezi mapami $(\mathbb{T}U, x_*)$ a $(\mathbb{T}U', x'_*)$

$$x_* \circ x'^{-1}_* \qquad \left[x^i(x'^{-1}), \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}(x'^{-1}) a'^j \right]$$

kde $a = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = a'^i \frac{\partial}{\partial x'^i} \Rightarrow a^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}(x'^{-1})\, a'^j$

Kotečný prostor $\mathbb{T}_x^* M$

Def: kotečný prostor $\mathbb{T}_x^* M$ ≡

duální prostor k prostoru $\mathbb{T}_x M$ tečných vektorů v x

$\alpha \in \mathbb{T}_x^* M$ nazýváme 1-forma – lin. funkciál na $\mathbb{T}_x M$

$\alpha[a] = \langle \alpha, a \rangle = \alpha \cdot a$ preferovaný zápis – zúžení

reflexivita prostorů $\mathbb{T}_x M$ a $\mathbb{T}_x^* M$

duál k $\mathbb{T}_x^* M$ izomorfní s $\mathbb{T}_x M$ – ztotožňujeme

$a[\alpha] = a \cdot \alpha = \alpha \cdot a = \alpha[a]$ – zúžení

plyne z konečné dim

duální báze

e_i báze v $\mathbb{T} M$

e^i báze v $\mathbb{T}^* M$

$e^i \cdot e_j = \delta^i_j$ ← duální báze

zúžení v souřadnicích

$\alpha \cdot a = \alpha_i a^i$ $\alpha = \alpha_i e^i$ $a = a^j e_j$

gradient funkce

derivace ve směru definuje lin. funkcionál na teč. vektorech
$a[f]$ jako funkcionál na a
$(a+b)[f] = a[f] + b[f]$ $\quad (ra)[f] = r\, a[f]$
tj. existuje 1-forma df - gradient f - taková že
$a[f] = \langle df, a\rangle = a\cdot df$

vlastnosti gradientu v x

$$d(f+g) = df + dg \qquad f,g \in \mathcal{F}M$$
$$d(rf) = r\, df \qquad r \in \mathbb{R}$$
$$d(fg) = f|_x\, dg + df\, g|_x$$

derivace složené fce
$f = F(f^1, \dots, f^k)$ $\quad f, f^i \in \mathcal{F}M$ $\quad F: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ hladká
$$\Rightarrow \quad df = \sum_j \frac{\partial F}{\partial f^j}(f^1 \dots f^k)\, df^j$$
vše plyne z analog. vlastn. der. ve směru $a[f]$

souřadnicové báze v $T^*_x M$
dx^i tvoří bázi v $T^*_x M$ duální k $\frac{\partial}{\partial x^i}$
$$\frac{\partial}{\partial x^i}\cdot dx^j = \frac{\partial}{\partial x^i}[x^j] = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta^j_i$$
forma dx^j závisí pouze na x^j (nekontextová jako $\frac{\partial}{\partial x^j}$)

souřadnice vektorů a 1-forem
$$\alpha = \alpha_a\, dx^a \qquad \alpha_a = \alpha\cdot \frac{\partial}{\partial x^a}$$
$$a = a^a \frac{\partial}{\partial x^a} \qquad a^a = a\cdot dx^a$$

transformace souřadnic
$$dx'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\, dx^i \quad \Rightarrow \quad a'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\, a^b$$
$$\frac{\partial}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\frac{\partial}{\partial x^i} \quad \Rightarrow \quad \alpha'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a}\,\alpha_b$$

kotečný bundle

soubor všech 1-forem ve všech bodech tvoří kotečný bundle

$$T^*M = \bigcup_{x\in M} T^*_x M$$

kotečný bundle je dif. varieta

atlas indukovaný atlasem na M

mapa (U, x) na M $\quad x \in U$

1-formě $\alpha \in T^*_x M$ přiřadíme souřadnice

$$x^* = [x^i, \alpha_i] \quad \text{kde}$$

$$x^i = x^i(x) \qquad \alpha_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \alpha$$

dostáváme mapu (T^*U, x^*) na T^*M

přechodové zobr. mezi mapami (T^*U, x^*) a (T^*U', x'^*)

$$x^* \circ x'^{*-1} \qquad \left[x^i(x'^{-1}), \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}(x \circ x'^{-1})\alpha'_j\right]$$

kde $\alpha = \alpha_i dx^i = \alpha'_i dx'^i \Rightarrow \alpha_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}(x \circ x'^{-1})\,\alpha'_j$

Vektorové pole a pole 1-forem

Def: vektorové pole $\mathcal{T}M$ (často $\mathfrak{X}(M)$)

vektorové pole a je zobrazení (řez $\mathbb{T}M$)

$a: M \to \mathbb{T}M \qquad x \to a(x) \in \mathbb{T}_x M$

a je hladké pokud komponenty v bázi $\frac{\partial}{\partial x^a}$ jsou hladké

Def: pole 1-forem $\mathcal{T}^*M$

pole 1-forem α je zobrazení (řez $\mathbb{T}^*M$)

$\alpha: M \to \mathbb{T}^*M \qquad x \to \alpha(x) \in \mathbb{T}^*_x M$

α je hladké pokud kompon. v bázi dx^a jsou hladké

$\mathcal{F}M$-linearita

$\mathcal{T}M$ a $\mathcal{T}^*M$ jsou moduly nad okruhem fcí $\mathcal{F}M$, tj. $\mathcal{F}M$-moduly

$\mathcal{T}M$ a $\mathcal{T}^*M$ jsou k sobě duální ve smyslu $\mathcal{F}M$-modulů

tj. platí reflexivita (díky exist. lokální konečné báze)

explicitně: mějme zobrazení

$m: \mathcal{T}^*M \to \mathcal{F}M \qquad \mu: \mathcal{T}M \to \mathcal{F}M$

splňující $\mathcal{F}M$-linearitu

$m[\alpha+\beta] = m[\alpha] + m[\beta] \qquad \mu[a+b] = \mu[a] + \mu[b] \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{T}^*M$

$m[f\alpha] = f\, m[\alpha] \qquad \mu[fa] = f\,\mu[a] \qquad a, b \in \mathcal{T}M$

pak $m \in \mathcal{T}M \qquad \mu \in \mathcal{T}^*M \qquad f \in \mathcal{F}M$

$\mathcal{F}M$-linearita implikuje "ultralokalitu" = bodovou závislost

Derivace na $\mathcal{F}M$

derivace na okruhu $\mathcal{F}M$ je zobrazení

$a: \mathcal{F}M \to \mathcal{F}M$

splňující

$a[f+g] = a[f] + a[g] \qquad a[rf] = r\, a[f]$

$a[fg] = a[f]\, g + f\, a[g]$ (nelokalizovaného do bodu!)

takové zobr. je ekv. vekt. poli $a \in \mathcal{T}M$

$a[f]|_x$ určuje derivaci v x, tj. $a|_x \in \mathbb{T}_x M \Rightarrow a \in \mathcal{T}M$

pole $a \in \mathcal{T}M$ je hladké pokud $a[f] \in \mathcal{F}M$ pro lib. $f \in \mathcal{F}M$

Lieova závorka

definujme operaci $[a,b] : \mathcal{F}M \to \mathcal{F}M$ danou vekt. p. $a, b \in TM$

$$[a,b][f] = a[b[f]] - b[a[f]]$$

$[a,b]$ je derivace na $\mathcal{F}M$

linearita zřejmá

$$[a,b][fg] = a[b[fg]] - b[a[fg]] = a[b[f]g + f\,b[g]] - b[a[f]g + f\,a[g]]$$
$$= a[b[f]]g - b[a[f]]g + f\,a[b[g]] - f\,b[a[g]]$$
$$+ \cancel{a[g]\,b[f]} + \cancel{a[f]\,b[g]} - \cancel{a[f]\,b[g]} - \cancel{b[f]\,a[g]}$$
$$= [a,b][f]\,g + f\,[a,b][g]$$

$\Rightarrow$ $[a,b]$ je derivace $\Rightarrow$ $[a,b]$ je vekt. pole

Def: $[\,,\,]$ je Lieova závorka

$$[\,,\,] : TM \times TM \to TM$$

vlastnosti Lieovy závorky

$$[a,b] = -[b,a]$$
$$[a, fb] = f\,[a,b] + a[f]\,b \qquad [fa, b] = f\,[a,b] - b[f]\,a$$
$$[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0 \qquad \text{Jacobiho identita}$$

důkaz:

$$[a, fb][g] = a[f\,b[g]] - f\,b[a[g]] = f(a[b[g]] - b[a[g]]) + a[f]\,b[g] =$$
$$= f\,[a,b][g] + a[f]\,b[g] \qquad \Rightarrow [a, fb] = f[a,b] + a[f]\,b$$
$$[a,[b,c]][f] + c.p. = a[[b,c][f]] - [b,c][a[f]] + c.p.$$
$$= a[b[c[f]]] - a[c[b[f]]] - b[c[a[f]]] + c[b[a[f]]] + c.p. = 0$$

souřadnicové báze

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0 \qquad \Leftarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$$

L. závorka v souřadnicích

$$[a,b] = \left(a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

důkaz:

$$\left[a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, b^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = \left[a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] b^j + a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} =$$
$$= a^i \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]}_{0} b^j + \left(a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Def: holonomní a neholonomní báze v TM

báze e_i se nazývá

- holonomní $\equiv$ existují souř. x^i tak, že $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$
- neholonomní $\equiv$ neexistuje souř. x^i tak, že $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$

nutná a postačující podmínka holonomnosti báze

e_i je holonomní $\Leftrightarrow$ $[e_i, e_j] = 0$

nutná podmínka – triviální

postačující podm. – viz Frob. věta

holonomnost je vlastnost celé báze, ne jen jednotliv. vekt.

Př:

$$a_1 = \frac{x}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\varrho}\frac{\partial}{\partial y} \qquad \varrho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$a_2 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

$$[a_1, a_2] = \left[\frac{x}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\varrho}\frac{\partial}{\partial y}, -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right]$$

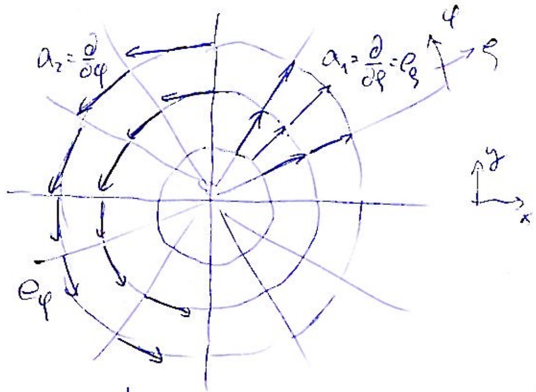
$$= y\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\varrho}\right)\frac{\partial}{\partial x} - x\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\varrho}\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\left[\frac{x}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y}\right] + \left[\frac{y}{\varrho}\frac{\partial}{\partial y}, -y\frac{\partial}{\partial x}\right]$$

$$= \left(\frac{y}{\varrho} - \frac{xy}{\varrho^2}\frac{x}{\varrho}\right)\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{x}{\varrho} - \frac{xy}{\varrho^2}\frac{y}{\varrho}\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$+ \frac{x}{\varrho}\frac{\partial}{\partial y} - x\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\varrho}\right)}_{-\frac{x}{\varrho^2}\frac{y}{\varrho}}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\varrho}\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$= 0$$



$$a_1 = \frac{\partial}{\partial\varrho} \qquad a_2 = \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Př:

$$e_\varrho = \frac{\partial}{\partial\varrho} \qquad e_\varphi = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$[e_1, e_2] = \left[\frac{\partial}{\partial\varrho}, \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] = -\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} = -\frac{1}{\varrho}e_\varphi$$

Př:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial\varrho}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{x}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\varrho}\frac{\partial}{\partial y}\right] = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{x^2}{\varrho^3}\right)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{yx}{\varrho^3}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$= \frac{y^2}{\varrho^3}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{xy}{\varrho^3}\frac{\partial}{\partial y} \neq 0$$

holonomní jsou souř. báze, ne jiné

Def: paralelizovatelnost tečného bundle TM

TM je paralelizov., též triviální $\equiv$
existuje globální báze v TM

ne každý tečný bundle je paralelizovatelný
příklady triviálních:

$\mathbb{R}^n$ souř. vektory kart. souř.
T^n generátory cyklů S^1
G levo (či pravo) invariantní pole
S^1, S^3, S^7 jediné sféry tzl. jsou paralel.
$S^2 \times \mathbb{R}$ ale S^2 není paralel!

příklady netriviálních:

S^n $n \neq 1,3,7$ pro S^2 známo jako, že nelze "učesat" sféru

Př: S^3 Hopfova fibrace